Matematyka – notatki do wykładu

1 Zbiory i działania na zbiorach.

Pojęcie zbioru jest to pojęcie pierwotne (nie definiuje się tego pojęcia). Pojęciami pierwotnymi są: element zbioru i przynależność elementu do zbioru.

W rachunku zbiorów używamy następujących symboli:

- przynależność: $x \in A$, $\sim x \in A \Leftrightarrow x \notin A$,
- zbiór pusty: $\emptyset$,
- przestrzeń X,
- zbiory skończone: $\{x\}$, $\{a, b, c\}$, $\{1, \ldots, n\}$, $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

1.1 Zawieranie i równość zbiorów

Definicja. Niech $A, B \subset X$. Wtedy

$$A \subset B \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} (x \in A \Rightarrow x \in B),$$

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subset B \ \wedge \ B \subset A) \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Wniosek 1.1. *Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$ mamy*

$$A \neq B \Longleftrightarrow [\sim (A \subset B) \vee \sim (B \subset A)].$$

Definicja. Zbiory $A, B \subset X$ są **rozłączne**, jeśli $A \cap B = \emptyset$.

1.2 Działania na zbiorach

Definicja. Niech $A, B \subset X$. Działania mnogościowe **sumy**, **iloczynu**, **różnicy** i **dopełnienia** definiujemy następująco:

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\},$$

$$A' = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}.$$

Wniosek 1.2. *Dla zbiorów $A, B \subset X$ mamy $A \setminus B = A \cap B'$.*

1.3 Iloczyn kartezjański zbiorów

Definicja. Iloczynem kartezjańskim zbiorów X oraz Y nazywamy zbiór $X \times Y$ wszystkich uporządkowanych par (x, y), gdzie $x \in X$ oraz $y \in Y$, tzn.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \ \wedge \ y \in Y\}.$$

1.4 Zbiory liczbowe, przedziały w zbiorze $\mathbb{R}$

Zbiory liczbowe:

- zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
- zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$,
- zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ – (uzupełnienie $\mathbb{Q}$, aksjomat ciągłości).

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

1) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – przedział otwarty,
2) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ – przedział prawostronnie otwarty,
3) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ – przedział lewostronnie otwarty,
4) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ – przedział domknięty.

1.5 Przestrzeń $\mathbb{R}^n$

Afiniczną przestrzenią n-wymiarową (przestrzeń punktów) nazywamy zbiór

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Wektorową przestrzenią n-wymiarową (przestrzeń wektorów) nazywamy zbiór

$$\mathbb{R}^n = \{[x_1, x_2, \dots, x_n] : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Działania:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n],$$

$$\alpha \cdot [x_1, x_2, \dots, x_n] = [\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n],$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + [y_1, y_2, \dots, y_n] = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

2 Elementy algebry liniowej

2.1 Pojęcie przestrzeni liniowej

Twierdzenie 2.1. *Dla dowolnych wektorów* $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$, $\boldsymbol{y} = [y_1, \dots, y_n]$, $\boldsymbol{z} = [z_1, \dots, z_n]$ *oraz dla* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *zachodzi*

1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ *(łączność),*

2) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ *(przemienność),*

3) $\boldsymbol{x} + [0, \dots, 0] = \boldsymbol{x}$,

4) $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = [0, \dots, 0]$, *gdzie* $-[x_1, \dots, x_n] = [-x_1, \dots, -x_n]$,

5) $\alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}$,

6) $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}$,

7) $(\alpha\beta) \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x})$,

8) $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

2.2 Liniowa zależność i liniowa niezależność

Definicja. Niech $\mathbf{v} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ będzie układem wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wektor $w = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots \alpha_n \boldsymbol{v}_n$ nazywamy ***liniową kombinacją układu wektorów*** $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ ***o współczynnikach*** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Definicja. Niech $\mathbf{v} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ będzie układem wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^n V$. Mówimy, że układ $\mathbf{v}$ jest ***liniowo zależny***, jeśli istnieją skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, nie wszystkie równe 0 i takie, że

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Mówimy, że układ $\mathbf{v}$ jest ***liniowo niezależny***, jeśli nie jest liniowo zależny.

Twierdzenie 2.2. *Układ* $\mathbf{v} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ *wektorów przestrzeni liniowej* $\mathbb{R}^n$ *jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego układu skalarów* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *prawdziwa jest implikacja*

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

2.3 Baza i wymiar przestrzeni

Definicja. Niech $\mathbf{v} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ będzie układem wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^n V$. Mówimy, że układ $\mathbf{v}$ jest ***bazą przestrzeni*** $\mathbb{R}^n$, jeśli każdy wektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ można przedstawić **tylko na jeden sposób** w postaci kombinacji wektorów układu $\mathbf{v}$, tzn.

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n.$$

Twierdzenie 2.3. *Niech* $\mathbf{v} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ *będzie układem wektorów przestrzeni* $\mathbb{R}^n$. *Układ* $\mathbf{v}$ *jest* **bazą przestrzeni** $\mathbb{R}^n$ *wtedy i tylko wtedy gdy jest liniowo niezależny i każdy wektor* $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ *można przedstawić w postaci kombinacji wektorów układu* $\mathbf{v}$.

Definicja. ***Wymiarem przestrzeni*** $\mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę wektorów dowolnej bazy tej przestrzeni (ozn. $\dim \mathbb{R}^n$).

Twierdzenie 2.4. *Dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi* $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Układ $\boldsymbol{e}_1 = [1, 0 \ldots, 0]$, $\boldsymbol{e}_2 = [0, 1, \ldots, 0]$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n = [0, 0, \ldots, 1]$ nazywamy ***bazą kanoniczną*** przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

2.4 Macierze

Definicja. Macierzą o wymiarach $m \times n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zbiór wszystkich macierzy o wymiarze $m \times n$ oznaczymy przez $\mathbf{M}_{m \times n}$.

Macierz $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times n}$ nazywamy ***kwadratową***, jeśli $m = n$.

Twierdzenie 2.5. *Zbiór* $\mathbf{M}_{m \times n}$ *jest przestrzenią liniową z działaniami*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \ldots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \ldots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & & \\ \alpha \cdot a_{m1} & \ldots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

2.4.1 Mnożenie macierzy

Definicja. Macierz $\mathbf{C} = [c_{ik}] \in \mathbf{M}_{m\times l}$ nazywamy ***iloczynem macierzy*** $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_{m\times n}$ oraz $\mathbf{B} = [b_{jk}] \in \mathbf{M}_{n\times l}$, jeśli

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad \text{dla } (i,k) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,l\}.$$

Definicja. Macierz

$$\mathbf{I} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{n\times n}$$

nazywamy ***macierzą jednostkową***.

Twierdzenie 2.6. *Dla dowolnego* $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ *zachodzi*

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{I}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

2.4.2 Macierz odwrotna

Definicja. Macierz $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ nazywamy ***odwracalną***, jeśli istnieje taka macierz $\mathbf{A}' \in \mathbf{M}_{n\times n}$, że

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}' = I = \mathbf{A}'\cdot\mathbf{A}.$$

Macierz $\mathbf{A}'$, jeśli taka istnieje, nazywamy macierzą odwrotną dla macierzy $\mathbf{A}$ i oznaczamy przez $\mathbf{A}^{-1}$.

2.4.3 Macierz transponowana

Definicja. Transponowaniem macierzy nazywamy taką operację $\cdot^T : \mathbf{M}_{m\times n} \to \mathbf{M}_{n\times m}$, że

$$\mathbf{A}^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}] \qquad \text{dla } \mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_{m\times n}.$$

Twierdzenie 2.7. *Operacja transponowania ma następujące własności:*

(i) $(\mathbf{A}^T)^T = A$,

(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,

(iii) $(\alpha\cdot\mathbf{A})^T = \alpha\cdot\mathbf{A}^T$,

(iv) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$,

(v) jeśli istnieje $\mathbf{A}^{-1}$, *to* $(\mathbf{A}^{-1})^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}$.

2.4.4 Wyznacznik macierzy kwadratowej

Definicja. Wyznacznikiem z macierzy kwadratowej $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ nazywamy funkcję $\det : \mathbf{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ określoną indukcyjnie w następujący sposób:

1) jeśli $\mathbf{A} = [a] \in \mathbf{M}_{1\times 1}$, to $\det \mathbf{A} = a$,

2) dla $n \geqslant 2$ oraz $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ definiujemy

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j},$$

gdzie macierz $\mathbf{A}_{kl} \in \mathbf{M}_{(n-1)\times(n-1)}$ powstaje z macierzy $\mathbf{A}$ przez wykreślenie k-tego wiersza oraz l-tej kolumny.

Uwaga 2.1. Wzór z definicji nosi nazwę wzoru Laplace'a dla pierwszego wiersza.

Twierdzenie 2.8 (wzór Laplace'a)**.** *Jeśli* $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$*, to*

(i) $\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det \mathbf{A}_{kj}$ *(wzór Laplace'a dla k-tego wiersza,*

(ii) $\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \mathbf{A}_{ik}$ *(wzór Laplace'a dla k-tej kolumny.*

Twierdzenie 2.9. *Wyznacznik macierzy kwadratowej* $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ *nie zmieni się, jeśli do dowolnego wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez dowolną liczbę.*

Twierdzenie 2.10 (tw. Cauchy'ego)**.** *Jeśli* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{n\times n}$*, to* $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B})$.

Twierdzenie 2.11. *Macierz* $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ *jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

2.4.5 Rząd macierzy

Definicja. Rzędem macierzy $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}$ nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych wierszy (kolumn) (ozn. rz$\mathbf{A}$).

Twierdzenie 2.12. *Rząd macierzy* $\mathbf{A}$ *nie zmieni się, jeśli*

- *przestawimy dwa wybrane wiersze (kolumny),*
- *wybrany wiersz (kolumnę) pomnożymy przez liczbę różną od zera,*
- *do wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez liczbę.*

Twierdzenie 2.13. *Niech* $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_{n\times n}$*. Jeśli* $\det \mathbf{A} \neq 0$*, to macierz* $\mathbf{A}$ *jest odwracalna oraz* $\mathbf{A}^{-1} = [a'_{ij}]$*, gdzie*

$$a'_{ij} = (\det \mathbf{A})^{-1} (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji} \qquad \text{dla } (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2.$$

3 Układy równań liniowych

Rozważymy układy równań liniowych postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{U}$$

lub w skrócie

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T, \tag{U}$$

gdzie $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_{m\times n}$ jest daną macierzą, $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ jest niewiadomą oraz $\mathbf{b} = [b_1, \ldots, b_m] \in \mathbb{R}^m$ jest stałą.

Definicja. Układ *(U)* nazywamy ***jednorodnym***, jeśli $\mathbf{b} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$. W przeciwnym przypadku mówimy, że układ *(U)* jest ***układem niejednorodnym***.

Twierdzenie 3.1 (Kroneckera-Capelliego)**.** *Niech* $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_{m\times n}$ *oraz* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$*. Wówczas układ równań liniowych (U) jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy* rz$\mathbf{A}$ = rz$\mathbf{A}_u$.

Twierdzenie 3.2 (Cramera)**.** *Niech w układzie (U) zachodzi* $m = n$ *oraz* $\det A \neq 0$*. Wówczas jedyne rozwiązanie układu (U) dane jest wzorem*

$$x_j = \frac{\det \mathbf{A}_j}{\det \mathbf{A}} \qquad \text{dla } j \in \{1,\ldots,n\},$$

gdzie $\mathbf{A}_j$ *jest macierzą powstałą z macierzy* $\mathbf{A}$ *przez zastąpienie j-tej kolumny macierzy* $\mathbf{A}$ *kolumną wyrazów wolnych* $\mathbf{b}$.

4 Elementy matematyki finansowej

4.1 Wartość pieniądza w czasie

- $K_0 = PV$ – wartość początkowa, wartość bieżąca (present value),
- $K_1 = FV$ – wartość końcowa, wartość przyszła (future value),
- $Z = K_1 - K_0$ – odsetki.

Definicja. Stopą procentową nazywamy stosunek wartości odsetek do wartości początkowej,

$$r = \frac{Z}{K_0} = \frac{K_1 - K_0}{K_0}.$$

Uwaga 4.1. Stopa procentowa zależy od przedziału czasu. Przedział ten nazywamy okresem stopy procentowej.

4.1.1 Oprocentowanie

Definicja. Oprocentowanie to naliczenie odsetek traktowanych jako zapłata za użyczenie kapitału. Odsetki mogą być wypłacane:

- na końcu okresu użyczenia (oprocentowanie z dołu);
- na początku okresu użyczenia (oprocentowanie z góry).

4.1.2 Kapitalizacja

Definicja. Kapitalizacja to dopisanie odsetek do kapitału. Czas po którym to następuje nazywamy okresem kapitalizacji. Odsetki mogą być dopisane:

- na końcu okresu kapitalizacji (kapitalizacja z dołu)
- na początku okresu kapitalizacji (kapitalizacja z góry).

Ze względu na okresy kapitalizacji rozróżnia się dwa jej rodzaje:

- kapitalizacja zgodna - okres stopy procentowej równy okresowi kapitalizacji,
- kapitalizacja niezgodna - w przeciwnym przypadku.

Ze względu na sposób oprocentowania rozróżnia się:

- kapitalizacja prosta - kapitalizacji podlega kapitał początkowy,
- kapitalizacja złożona - kapitalizacji podlega zebrana kwota.

4.1.3 Dyskontowanie

Definicja. Dyskontowanie to wyznaczanie wcześniejszej wartości kapitału na podstawie znajomości wartości późniejszych. Efektem dyskontowania jest więc wartość bieżąca kapitału. Stopę procentową wykorzystywaną przy dyskontowaniu nazywamy stopą dyskontową.

4.2 Kapitalizacja prosta zgodna

Zmiany wartości kapitału początkowego K_0 w czasie następują skokowo poprzez dopisanie odsetek. Niech (P_n) będzie ciągiem przyszłych wartości kapitału K_0 (odsetki dopisywane są z dołu). Przyszłą wartość P_{n+1} na koniec $(n+1)$-go okresu kapitalizacji otrzymujemy z wartości P_n z końca n-tego okresu poprzez dopisanie odsetek Z_{n+1} przysługujących za $(n+1)$-szy okres, czyli

$$P_{n+1} = P_n + Z_{n+1} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

przy czym $P_0 = K_0$. Ciąg (Z_n) jest ciągiem stałym

$$Z_{n+1} = K_0 r \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

więc $P_{n+1} - P_n = K_0 r$, co oznacza, że (P_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $K_0 r$, więc

$$P_n = K_0(1 + nr) \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.1}$$

Suma odsetek za pierwszych n okresów jest równa $nK_0 r$.

Wartość przyszłą/przeszłą P_n można zaktualizować na dowolny moment

$$P_{n+k} = P_n \left(1 + \frac{kr}{1 + nr}\right) \quad \text{dla } k = -n, -n+1, \ldots, 0, 1, \ldots.$$

Przykład 4.1. Jaką kwotę zgromadzimy przez 5 lat składając kwotę 5 000 PLN na lokatę oprocentowaną w wysokości $4,5\%$, jeśli przyjmujący lokatę oferuje kapitalizację prostą?

Przykład 4.2. Za 8 miesięcy przyznawana jest nagroda w wysokości 1 000 PLN. Kwota ta zdyskontowana na 2 miesiące wg. kapitalizacji prostej daje wartość 900 PLN. Jaka jest obecna wartość nagrody?

4.3 Kapitalizacja złożona z dołu zgodna

W kapitalizacji złożonej oprocentowaniu podlega zarówno kapitał początkowy K_0, jak też zgromadzone do danego momentu odsetki. Odsetki są dopisywane na koniec okresów kapitalizacji i okres stopy procentowej pokrywa się z okresem kapitalizacji.

Niech (K_n) będzie ciągiem przyszłych wartości kapitału. Podobnie jak w poprzednim modelu mamy

$$K_{n+1} = K_n + Z_{n+1} \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots.$$

Odsetki Z_{n+1} za $(n+1)$-szy okres naliczane są z całego zgromadzonego kapitału

$$Z_{n+1} = K_n r \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

więc ciąg (K_n) jest ciągiem geometrycznym oraz

$$K_n = K_0(1 + r)^n \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots. \tag{4.2}$$

Suma zebranych odsetek jest równa $K_n - K_0 = K_0((1 + r)^n - 1)$.

Podobnie jak poprzednio wartość przyszłą K_n można zaktualizować na dowolny moment

$$K_{n+k} = K_n(1 + r)^k \quad \text{dla } k = -n, -n+1, \ldots, 0, 1, \ldots.$$

Przykład 4.3. Przy jakiej roczne stopie procentowej i kapitalizacji złożonej kapitał podwoi swoją wartość po 4 latach.

Przykład 4.4. Rodzeństwo w wieku 8 oraz 10 lat otrzyma w spadku kwotę 500 tys. PLN. Jak należy podzielić spadek, aby przy rocznej kapitalizacji z dołu ze stopą $r = 10\%$, każde z dzieci w wieku 21 lat otrzymało taką samą kwotę?

Przykład 4.5. Bank przyjmuje kapitał w depozyt i jednocześnie udziela kredytu. Jaki jest zarobek banku na przestrzeni 10 lat, jeśli kwota depozytu i kredytu jest jednakowa i równa 300 tys. PLN, zaś stopy depozytowa o kredytowa są równe odpowiednio $r_d = 8\%$ oraz $r_k = 12\%$.

4.4 Kapitalizacja niezgodna

Niech teraz okres stopy procentowej nie pokrywa się z okresem kapitalizacji. Ze względu na stosunek okresu stopy procentowej do okresu kapitalizacji rozróżnia się:

- kapitalizację w podokresach, jeśli okres stopy procentowej jest wielokrotnością okresu kapitalizacji,
- kapitalizację w nadokresach, jeśli okres kapitalizacji jest wielokrotnością okresu stopy procentowej.

Niech

$$m = \frac{\text{okres stopy procentowej}}{\text{okres kapitalizacji}}.$$

W przypadku kapitalizacji niezgodnej odsetki przypadające na jeden okres kapitalizacji wyznacza się na podstawie względnej stopy kapitalizacji $\overline{r} = \frac{r}{m}$, gdzie r jest stopą nominalną.

Jeśli r jest roczną stopą procentową, to w zależności od m kapitalizację nazywamy:

- roczną, gdy $m = 1$,
- półroczną, gdy $m = 2$,
- kwartalną, gdy $m = 4$,
- miesięczną, gdy $m = 12$,
- tygodniową, gdy $m = 52$,
- dobową, gdy $m = 365$,
- dwuletnią, gdy $m = 0,5$,
- pięcioletnią, gdy $m = 0,2$.

Przyszła wartość kapitału K_0 w kapitalizacji niezgodnej po k okresach wynosi wtedy:

- dla kapitalizacji prostej z dołu

$$P_{k/m} = K_0\left(1 + k\frac{r}{m}\right) \qquad \text{dla } k = 0, 1, 2 \ldots,$$

- dla kapitalizacji złożonej z dołu

$$K_{k/m} = K_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^k \qquad \text{dla } k = 0, 1, \ldots.$$

Przykład 4.6 (metoda liczb procentowych)**.** Model kapitalizacji prostej stosuje się najczęściej przy oprocentowaniu kont z często zmieniającym się saldem. Niech r będzie roczną stopą procentową. Przyszła wartość kwoty K_0 po t dniach w oprocentowaniu prostym wynosi

$$K_t = K_0\left(1 + t\frac{r}{365}\right),$$

zaś odsetki $Z_t = tK_0\frac{r}{365}$. Czynnik tK_0 nazywamy liczbą procentową, zaś wielkość $\frac{r}{365}$ – dzielnikiem procentowym.

Załóżmy, że na rachunku dokonano N operacji (wpłat/wypłat), przy czym wysokość kwoty w j-tej operacji oznaczymy przez S_j (wpłata+/wypłata-). Niech jeszcze t_j oznacza liczbę dni między terminem j-tej operacji i momentem rozrachunku. Wtedy

$$K_t = \sum_{j=1}^{N} S_j\left(1 + t_j\frac{r}{365}\right) = \sum_{j=1}^{N} S_j + \frac{r}{365}\sum_{j=1}^{N} S_j t_j.$$

Sumę $L = \sum_{j=1}^{N} S_j t_j$ nazywamy sumaryczną liczbą procentową.

Przykład 4.7. Na rachunku bankowym dokonano następujących operacji: 1.02.2009 – wpłata 560 PLN, 15.04.2009 – wpłata 140 PLN, 5.05.2009 – wypłata 500 PLN. Jaką maksymalną kwotę można będzie pobrać 30.05.2009, jeśli roczna stopa procentowa wynosi 2%?

Twierdzenie 4.1. *Dla ustalonej wielokrotności okresu stopy procentowej przyszła wartość kapitału w model kapitalizacji złożonej z dołu jest rosnącą funkcją częstości kapitalizacji odsetek*

$$K_n \leqslant K_{nm/m}.$$

Przykład 4.8. Kapitał 1 000 PLN został oprocentowany na 4,5% w stosunku rocznym. Ustalić przyszłą wartość kapitału po 5 latach w przypadku kapitalizacji złożonej dla kapitalizacji: pięcioletniej, rocznej, półrocznej, kwartalnej, miesięcznej, tygodniowej i dobowej.

4.5 Strumienie płatności

Zależność opisująca wartość przyszłą strumienia płatności (kapitalizacja złożona) jest postaci

$$FV_n = PV \prod_{k=1}^{n}(1+r_k) + \sum_{k=1}^{n-1} PMT_k \prod_{l=k+1}^{n}(1+r_k) + PMT_n, \tag{4.3}$$

gdzie

- n – czas trwania inwestycji (liczba okresów),
- FV_n – wartość przyszła inwestycji po n okresach,
- PV – początkowa płatność,
- PMT_k – rata płatności dokonana na koniec k-tego okresu ($1 \leqslant k \leqslant n$),
- r_k – stopa procentowa obowiązującą w k-tym okresie.

Najczęściej spotykaną postacią szczególną tego wzoru jest:

$$\begin{aligned} FV_n &= PV(1+r)^n + PMT\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{n-k} \\ &= PV(1+r)^n + PMT\frac{(1+r)^n-1}{r}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

gdzie

- $r = r_k$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$ jest **stałą** okresową stopą procentową,
- $PMT = PMT_k$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$ jest **stałą** w czasie trwania inwestycji okresową wpłatą.

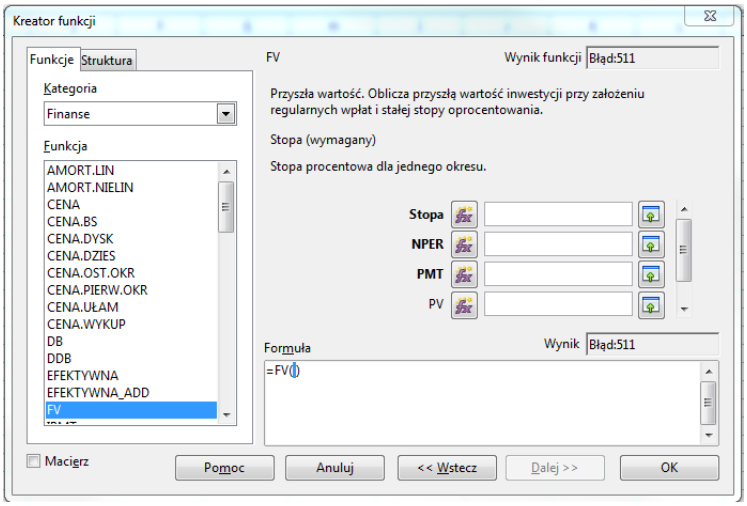
Aby zaznaczyć kierunek przepływów (wpłaty ze znakiem ujemnym, wypłaty – z dodatnim), funkcje arkusza kalkulacyjnego *LibreOffice, OpenOffice, MS Excel* pracują w oparciu o następującą modyfikację wzoru (4.4):

$$FV_n + PV(1+r)^n + PMT\frac{(1+r)^n-1}{r} = 0. \tag{4.5}$$

4.6 Funkcje finansowe w arkuszu kalkulacyjnym

4.6.1 Wartość przyszła FV()

FV() zwraca przyszłą wartość inwestycji (stałe płatności okresowe i stała stopa procentowa).



Składnia tej funkcji zawiera pola **Stopa**, **NPER**, **PMT**, PV, Typ.

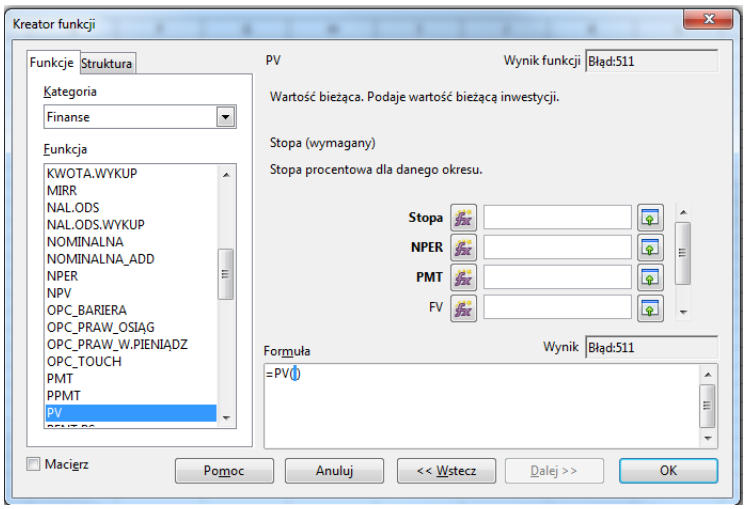
Przykład 4.9. Obliczyć końcową wartość lokaty w kwocie 4 000 złożonej na okres 4 lat przy stałej rocznej stopie procentowej $2,1\%$. Jak zmieni się jej końcowa wartość, jeśli zastosujemy kapitalizację: a) kwartalną, b) miesięczną, c) tygodniową, d) dzienną.

Przykład 4.10. Jaka będzie końcowa wartość inwestycji polegającej na stałym comiesięcznym odkładaniu 200 PLN przez okres 40 lat, jeśli bank stosuje kapitalizację miesięczną przy rocznej stopie procentowej w wysokości $1,75\%$?

Przykład 4.11. Jaką kwotę otrzymamy po okresie 20 lat posiadając na rachunku środki w wysokości 20 000 PLN i odkładając miesięcznie 300 PLN wolnych środków na lokacie oprocentowanej $2,5\%$ w skali roku przy miesięcznej kapitalizacji?

4.6.2 Wartość przeszła PV()

PV() zwraca początkową wartość inwestycji (stałe płatności okresowe i stała stopa procentowa).



Składnia tej funkcji zawiera pola **Stopa**, **NPER**, **PMT**, FV, Typ.

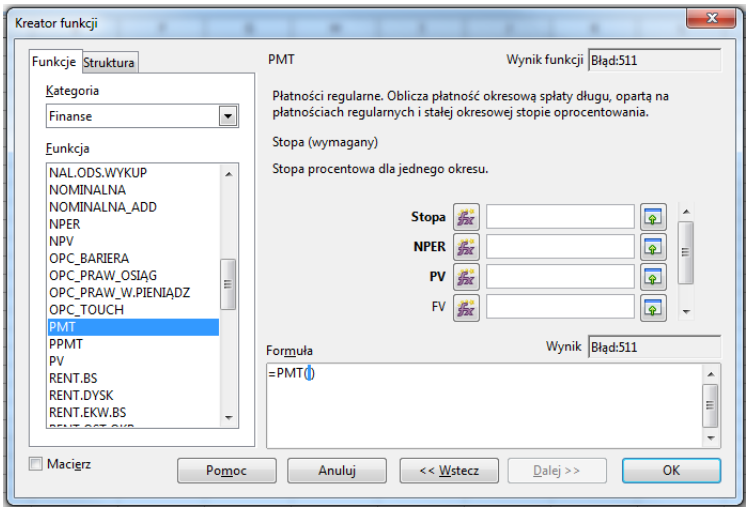
Przykład 4.12. Jaka jest dzisiejsza wartość kwoty 20 000 PLN, którą otrzymamy za 10 lat przy założeniu średniorocznej inflacji w wysokości $2,5\%$?

Przykład 4.13. Jaka będzie dzisiejsza wartość inwestycji z Przykładu 4.11 przy założeniu, że średnioroczna inflacja przez cały okres inwestycji wynosi $1,5\%$?

Przykład 4.14. Jaką maksymalną kwotę pożyczki otrzyma inwestor, który chce zaciągnąć kredyt na okres 10 lat, jeśli zdolność jego kredytowa pozwala spłacać miesięczne raty w wysokości 450 PLN, zaś bankowa (roczna) stopa kredytowa wynosi $5,5\%$? Jaka jest dzisiejsza wartość ostatniej raty kredytu, jeśli średnioroczna inflacja wyniesie 2%?

4.6.3 Rata – stała okresowa płatność PMT()

PMT() zwraca stałą okresową płatność (stała stopa procentowa).



Składnia tej funkcji zawiera pola **Stopa**, **NPER**, **PV**, FV, Typ.

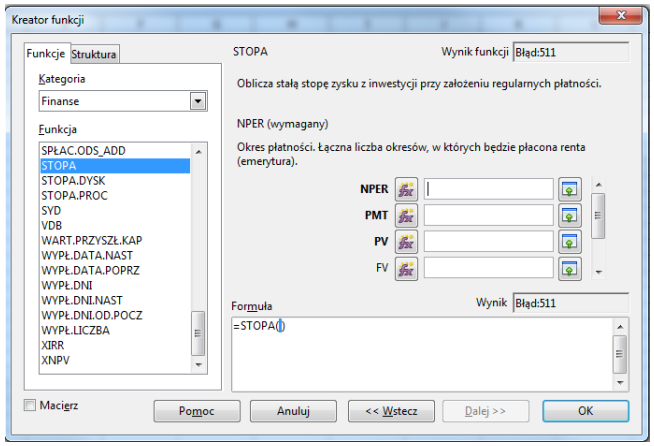
Przykład 4.15. Jak wysoka będzie (miesięczna) rata kredytu na udzielonego w kwocie 80 000 PLN na okres 10 lat przy (rocznej) stopie kredytowej $6,5\%$?

Przykład 4.16. Jak wysoka będzie miesięczna rata kredytu z Przykładu 4.15, jeśli wraz z ostatnią ratą klient spłaci dodatkowo kwotę 10 000 PLN?

Przykład 4.17. Jaką maksymalną miesięczną "rentę" otrzyma klient z bieżącej wartości inwestycji w Przykładzie 4.13, jeśli całą zgromadzoną kwotę złoży w banku na koncie oprocentowanym w wysokości $2,2\%$ w skali roku, wypłacając rentę przez okres 15 lat?

4.6.4 Stopa procentowa STOPA()

STOPA() zwraca stopę procentową dla **pojedynczego okresu inwestycji**; (iteracja algorytmu num. (do 20 powtórzeń) do osiągnięcia wyniku z dokł. 10^{-7}; przy braku wyniku: błąd **#LICZBA!**)



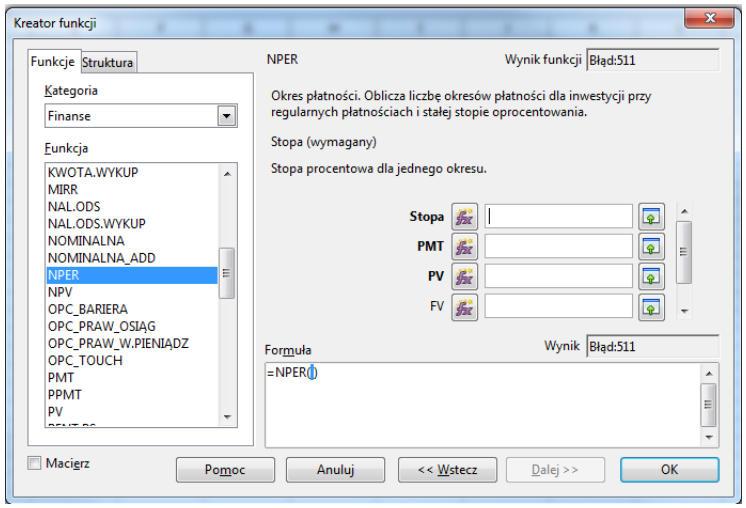
Składnia funkcji zawiera pola: **NPER**, **PMT**, **PV**, FV, Typ, Wartość szacowana (domyślnie 10%; jeśli algorytm nie znajduje wyniku, należy podać wartość początkową).

Przykład 4.18. Jaka jest stopa procentowa kredytu konsumenckiego udzielonego na zakup telewizora o wartości 6 500 PLN, jeśli należy go spłacić w dwunastu równych miesięcznych ratach w wysokości 600 PLN?

Przykład 4.19. Jaka jest stopa zwrotu z inwestycji w dwuletnie obligacje skarbowe o wartości nominalnej 500 000 PLN i stałej stopie procentowej $3,5\%$, której kupony wypłacane są co kwartał, jeśli inwestor nabył je za kwotę 488 00 PLN?

4.6.5 Liczba okresów – NPER()

NPER() zwraca liczbę okresów rozliczeniowych inwestycji (stałe płatności i stała stopa procentowa).



Składnia tej funkcji zawiera pola **Stopa**, **PMT**, **PV**, FV, Typ.

Przykład 4.20. Jak długo będzie spłacany kredyt w kwocie 75 000 PLN, jeśli zdolność kredytowa inwestora pozwala spłacać miesięczne raty w wysokości 900 PLN, zaś bankowa (roczna) stopa kredytowa wynosi $6,2\%$?

Przykład 4.21. Jak długo wystarczy środków z bieżącej wartości inwestycji w Przykładzie 4.13, jeśli cała zgromadzona kwota zostanie złożona w banku na koncie oprocentowanym w wysokości $2,3\%$ w skali roku, z którego wypłacana będzie miesięczna renta w wysokości 500 PLN?

5 Teoria optymalizacji – optymalizacja liniowa

5.1 Budowa modelu

Modele optymalizacji liniowej są najbardziej rozpowszechnioną grupą modeli matematycznych dotyczących **wyboru decyzji optymalnej**, tj. takiej, która przy istniejących ograniczeniach zapewnia, ze względu na przyjęte kryteria, najlepszą realizacją zamierzenia – celu.

Proces budowy modelu umożliwiającego wyznaczenie optymalnej decyzji składa się z następujących czterech etapów:

1. zdefiniowanie decyzji,
2. ustalenie zbioru decyzji dopuszczalnych $\mathcal{D}$,
3. przyjęcie miernika oceny realizacji celu,
4. określenie pojęcia decyzji optymalnej.

Otrzymany model wyboru decyzji optymalnej jest **zadaniem optymalizacji liniowej**, jeśli:

- pozwala na **ilościowe ujęcie rezultatów** w każdym etapie jego budowy,
- jego formalny zapis ma następujące własności:
  - każdą **decyzję** można opisać wektorem $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ o współrzędnych nieujemnych,
  - **ograniczenia wyboru** (zbiór $\mathcal{D}$) można opisać w postaci układu równań lub nierówności liniowych,
  - ocenę **stopnia osiągnięcia celu** przez decyzję dopuszczalną wyraża się poprzez **liniową funkcję celu**
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \mathcal{D}.$$
- ustalenie, czy decyzja optymalna $\mathbf{x}^\circ$ zapewnia **ekstremalność** wartości $f(\mathbf{x}^\circ)$ na zbiorze $\mathcal{D}$.

5.2 Przykładowy model – wartości rzeczywiste

5.2.1 Założenia

Firma uruchamia produkcję próbną batonów **Janek** i **Franek** z warunkami produkcji:

batony	nakłady jednostkowe			zysk
	maszyny (h/ j. prod.)	półprod. (kg/ j. prod.)	rob. (PLN/ j. prod.)	(PLN/ j. prod.)
Franek	$2,0$	40	100	480
Janek	$1,2$	60	200	210
zasób	$\leqslant 6$ (h)	$\leqslant 240$ (kg)	$\geqslant 400$ (PLN)	–

5.2.2 Konstrukcja modelu

1. **Definiowanie decyzji**. Decyzję wyrażą: x_1 – wielkość produkcji batonu Franek (w j. prod.) oraz x_2 – wielkość produkcji batonu Janek (w j. prod.). Stąd $\mathbf{x} = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$.
2. **Zbiór decyzji dopuszczalnych** $\mathcal{D}$. Warunki produkcji:
   - ograniczenie czasu pracy
$$2x_1 + 1,2x_2 \leqslant 6.$$
   - ograniczenie surowcowe
$$40x_1 + 60x_2 \leqslant 240.$$
   - ograniczenie płacowe
$$100x_1 + 200x_2 \geqslant 400.$$
   - interpretacja zmiennych
$$x_1 \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad x_2 \geqslant 0.$$
3. **Funkcja celu**. Przy decyzji $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ zysk osiągnięty ze sprzedaży obu wyrobów wyniesie
$$f(\mathbf{x}) = 480x_1 + 210x_2 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \mathcal{D}.$$
4. **Kryterium optymalizacji**. Wyznaczenie optymalnej decyzji sprowadza się do wyznaczenia takiego wektora $\mathbf{x}$, dla którego
$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \max.$$

5.2.3 Konstrukcja modelu – ujęcie matematyczne

$$f(\mathbf{x}) = 480x_1 + 210x_2 \longrightarrow \max$$

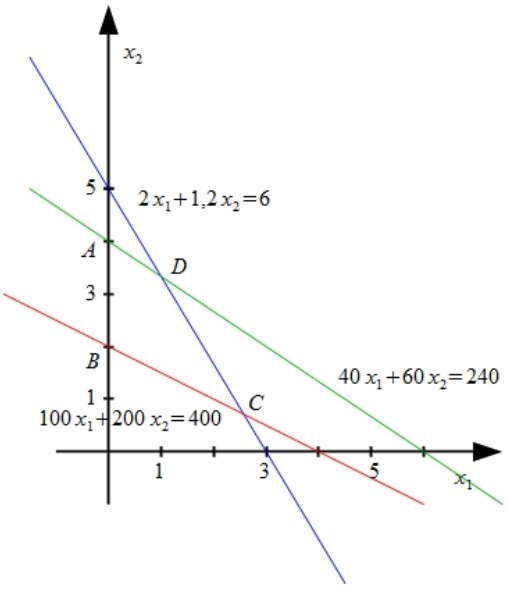
przy warunkach:

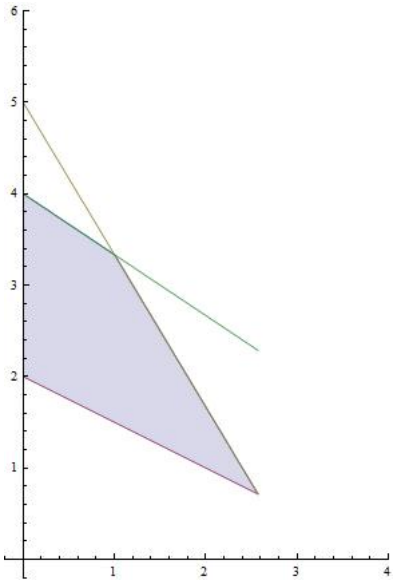
$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 1,2x_2 & \leqslant & 6, \\ 40x_1 & + & 60x_2 & \leqslant & 240, \\ 100x_1 & + & 200x_2 & \geqslant & 400, \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$$

5.2.4 Graficzna interpretacja – decyzje dopuszczalne

$$\begin{array}{lrcrcl} & f(\mathbf{x}) = 480x_1 + 210x_2 \longrightarrow \max & & & & \text{przy warunkach:} \\ [1] & 2x_1 & + & 1,2x_2 & \leqslant & 6, \\ [2] & 40x_1 & + & 60x_2 & \leqslant & 240, \\ [3] & 100x_1 & + & 200x_2 & \geqslant & 400, \\ [4] & x_1, x_2 & & & \geqslant & 0. \end{array}$$





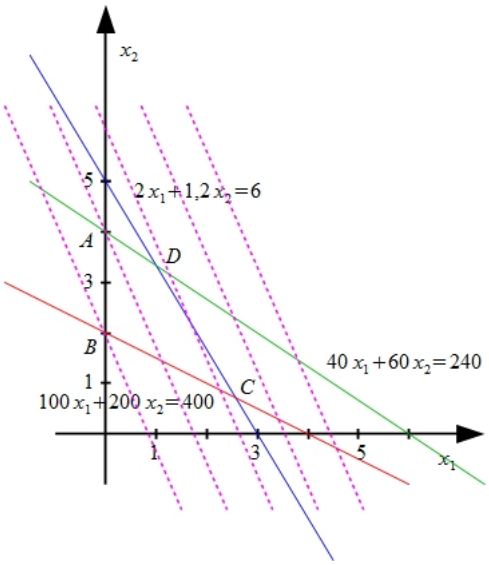
Zatem obszar dopuszczalny $\mathcal{D}$ to czworokąt o wierzchołkach $A = (0;4)$, $B = (0;2)$, $C = (\frac{18}{7};\frac{5}{7})$, $D = (1;\frac{10}{3})$.

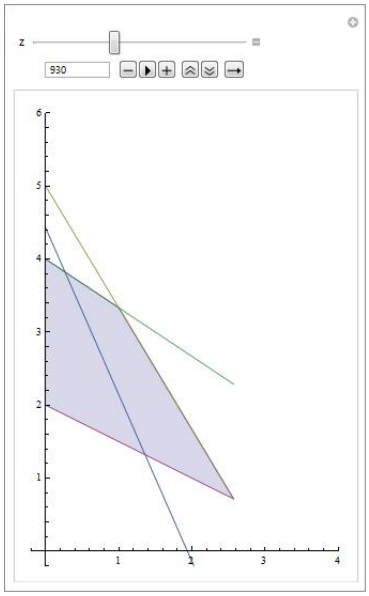
5.2.5 Graficzna interpretacja – funkcja celu

W modelu optymalizacji liniowej

$$\begin{array}{lrcrcl} & f(\mathbf{x}) = 480x_1 + 210x_2 \longrightarrow \max & & & & \text{przy warunkach:} \\ [1] & 2x_1 & + & 1,2x_2 & \leqslant & 6, \\ [2] & 40x_1 & + & 60x_2 & \leqslant & 240, \\ [3] & 100x_1 & + & 200x_2 & \geqslant & 400, \\ [4] & x_1, x_2 & & & \geqslant & 0, \end{array}$$

warstwie $480x_1 + 210x_2 = z$ funkcji celu f obrazując decyzje, przy których funkcja celu ma wartość $z \in (0, \infty)$





5.2.6 Implementacje modelu – MS Excel

Model optymalizacji liniowej (zadanie progr. liniowego)

$$
\begin{array}{llcl}
f(\mathbf{x}) = 480x_1 + 210x_2 \longrightarrow \max & & & \text{przy warunkach:} \\
[1] \quad 2x_1 + 1,2x_2 & \leqslant & 6, & \\
[2] \quad 40x_1 + 60x_2 & \leqslant & 240, & \\
[3] \quad 100x_1 + 200x_2 & \geqslant & 400, & \\
[4] \quad x_1, x_2 & \geqslant & 0, &
\end{array}
$$

zaimplementujemy w arkuszu kalkulacyjnym

	A	B	C	D	E	F
1			Model **BATONY**			
2						
3	F. celu	480	210			
4	Zmienne	x1	x2			
5	Zysk	**2,571429**	**0,714286**	**1384,286**		
6						
7						
8	Warunki					
9		Współczynniki		Wynik	Ograniczenie	
10	[1]	2	1,2	6	6	
11	[2]	40	60	145,7143	240	
12	[3]	100	200	400	400	
13						
14						

Microsoft Excel 12.0 Raport wyników
Arkusz: [Zeszyt1]Arkusz1
Raport utworzony: 2012-03-17 20:15:51

Komórka celu (Maks)

Komórka	Nazwa	Wartość początkowa	Wartość końcowa
$D$5	Zysk	900	1384,285714

Komórki decyzyjne

Komórka	Nazwa	Wartość początkowa	Wartość końcowa
$B$5	Zysk x1	1	2,571428571
$C$5	Zysk x2	2	0,714285714

Warunki ograniczające

Komórka	Nazwa	Wartość komórki	formuła	Status	Luz
$D$10	[1] Wynik	6	$D$10<=$E$10	Wiążące	0
$D$11	[2] Wynik	145,7142857	$D$11<=$E$11	Niewiążące	94,28571429
$D$12	[3] Wynik	400	$D$12>=$E$12	Wiążące	0

otrzymując $x_1 = 2,57$, $x_2 = 0,71$ dające końcowy zysk $1384,29$.

5.3 Przykładowy model – wartości całkowite

5.3.1 Założenia

Firma meblarska produkuje dwa rodzaje mebli: *Modern* oraz *Classic*. Do ich produkcji zużywa się drewno dwóch gatunków, którego zasoby są jedynym ograniczeniem wielkości produkcji. Jednostkowe nakłady gatunków drewna i ich zasobów tygodniowych przedstawiono w tabeli

zestaw mebli	nakłady jednostkowe drewna		zysk (tys. PLN/ zestaw)
	gat. A (m^3/zestaw)	gat. B (m^3/zestaw)	
Modern	6	5	3
Classic	10	4	$4,5$
zasób (m^3)	36	20	–

Ustalić taką liczbę wyprodukowanych w ciągu tygodnia zestawów, która zapewni firmie maksymalny zysk.

5.3.2 Konstrukcja modelu

1. **Definiowanie decyzji**. Decyzję wyrażają: x_1 – wielkość produkcji mebli Modern (w j. prod.) oraz x_2 – wielkość produkcji mebli Clasic (w j. prod.). Stąd $\mathbf{x} = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$.

2. **Zbiór decyzji dopuszczalnych** $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$. Warunki produkcji:

   - ograniczenie zasobów drewna gatunku A
   $$6x_1 + 10x_2 \leqslant 36.$$
   - ograniczenie zasobów drewna gatunku B
   $$5x_1 + 4x_2 \leqslant 20.$$
   - interpretacja zmiennych - nieujemność
   $$x_1 \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad x_2 \geqslant 0.$$
   - interpretacja zmiennych - całkowitość
   $$x_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{oraz} \quad x_2 \in \mathbb{Z}.$$

3. **Funkcja celu**. Przy decyzji $\mathbf{x} = [x_1, x_2] \in \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ zysk osiągnięty ze sprzedaży obu wyrobów wyniesie
$$f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4,5x_2 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}.$$

4. **Kryterium optymalizacji**. Optymalna decyzja to wyznaczenia takiego wektora $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$, dla którego
$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \max.$$

5.3.3 Konstrukcja modelu – ujęcie matematyczne

$$f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4,5x_2 \longrightarrow \max$$

przy warunkach:

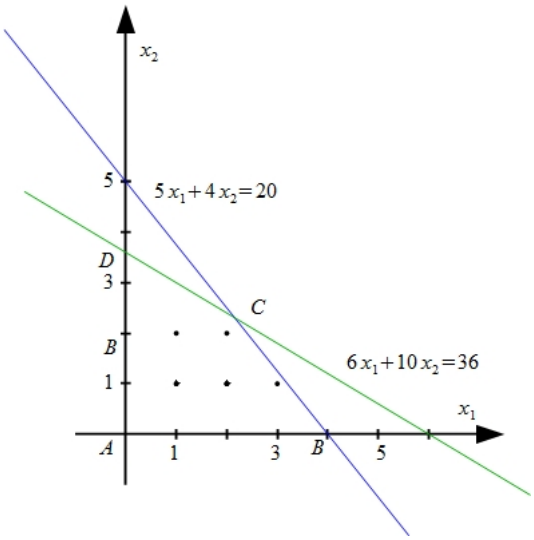
$$\begin{aligned} 6x_1 &+ 10x_2 \leqslant 36, \\ 5x_1 &+ 4x_2 \leqslant 20, \end{aligned}$$

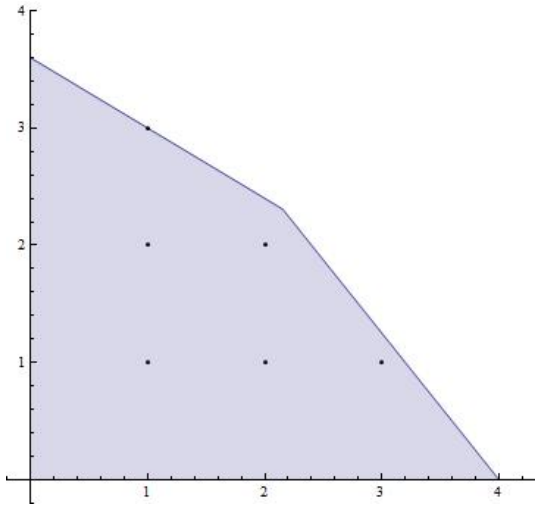
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0,$$

$$x_1, x_2 \text{ – liczby całkowite}$$

5.3.4 Graficzna interpretacja – decyzje dopuszczalne

$$
\begin{array}{llllll}
 & f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4,5x_2 \longrightarrow \max & & & & \text{przy warunkach:} \\
[1] & 6x_1 & + & 10x_2 & \leqslant & 36, \\
[2] & 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 20, \\
[3] & x_1, x_2 & & & \geqslant & 0, \\
[4] & x_1, x_2 & & & & \text{–całkowite.}
\end{array}
$$





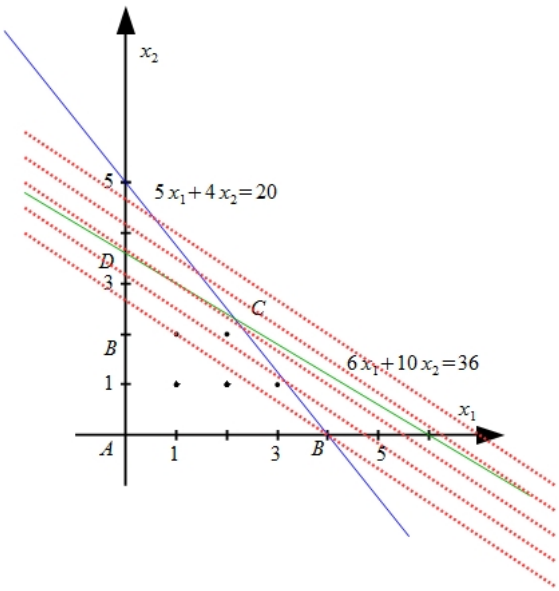
Obszar dopuszczalny $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ to zbiór punktów kratowych czworokąta $A = (0;0)$, $B = (4;0)$, $C = (\frac{28}{13}; \frac{30}{13})$, $D = (0; \frac{18}{5})$.

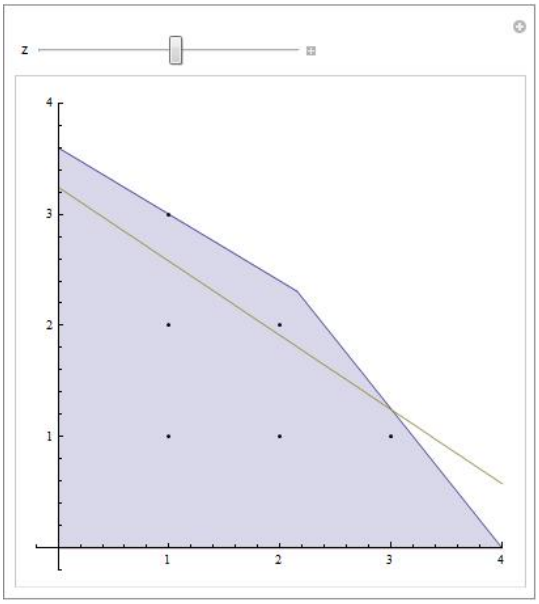
5.3.5 Graficzna interpretacja – funkcja celu

W interpretacji zmienności **funkcji celu** f w modelu

$$
\begin{array}{llllll}
 & f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4,5x_2 \longrightarrow \max & & & & \text{przy warunkach:} \\
[1] & 6x_1 & + & 10x_2 & \leqslant & 36, \\
[2] & 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 20, \\
[3] & x_1, x_2 & & & \geqslant & 0, \\
[4] & x_1, x_2 & & & & \text{–całkowite}
\end{array}
$$

wykorzystuje się warstwice $3x_1 + 4,5x_2 = z$ funkcji f obrazujące decyzje, przy których funkcja celu ma wartość $z \in (0, \infty)$,





5.3.6 Implementacje modelu – MS Excel

Model optymalizacji liniowej (zadanie progr. liniowego)

$$
\begin{array}{llllll}
 & f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4,5x_2 \longrightarrow \max & & & & \text{przy warunkach:} \\
[1] & 6x_1 & + & 10x_2 & \leqslant & 36, \\
[2] & 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 20, \\
[3] & x_1, x_2 & & & \geqslant & 0, \\
[4] & x_1, x_2 & & & & \text{–całkowite,}
\end{array}
$$

zaimplementujemy w arkuszu kalkulacyjnym

	A	B	C	D	E
1			Model **MEBLE**		
2					
3	F. celu	3	4,5		
4	Zmienne	x1	x2		
5	Zysk	**0**	**0**	**0**	
6					
7					
8	Warunki				
9		Współczynniki		Wynik	Ograniczenie
10	[1]	6	10	**0**	36
11	[2]	5	4	**0**	20
12					

	A	B	C	D	E
1	**Microsoft Excel 12.0 Raport wyników**				
2	**Arkusz: [z2.xlsx]Arkusz1**				
3	**Raport utworzony: 2012-06-02 14:41:55**				
4					
5					
6	Komórka celu (Maks)				
7		**Komórka**	**Nazwa**	**Wartość początkowa**	**Wartość końcowa**
8		$D$5	Zysk	0	16,5
9					
10					
11	Komórki decyzyjne				
12		**Komórka**	**Nazwa**	**Wartość początkowa**	**Wartość końcowa**
13		$B$5	Zysk x1	0	1
14		$C$5	Zysk x2	0	3
15					

otrzymując $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ dające zysk $16,5$ tys. PLN.

5.4 Model liniowy – teoria

5.4.1 Ogólne sformułowanie

W ogólnym modelu należy podjąć decyzję $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_k]$ będącą rozwiązaniem zadania:

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k \to \max\ (\min) \text{ przy war.:} \tag{5.6}$$

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k \leqslant b_1, \\
\ldots \\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pk}x_k \leqslant b_p, \\
a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + \ldots + a_{p+1,k}x_k \geqslant b_{p+1}, \\
\ldots \\
a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qk}x_k \geqslant b_q, \\
a_{q+1,1}x_1 + a_{q+1,2}x_2 + \ldots + a_{1+1,k}x_k = b_{q+1}, \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k = b_m,
\end{cases} \tag{5.7}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_k \geqslant 0. \tag{5.8}$$

Warunki (5.7)-(5.8) definiują zbiór $\mathcal{D}$ decyzji dopuszczalnych.

5.4.2 Interpretacja geometryczna

Twierdzenie 5.1. *W zadaniu optymalizacji liniowej zbiór $\mathcal{D}$ decyzji dopuszczalnych jest wielościennym zbiorem wypukłym ze skończoną liczbą wierzchołków.*

Twierdzenie 5.2. *Jeśli zadania programowania liniowego ma decyzję optymalną, to musi ją reprezentować co najmniej jeden wierzchołek zbioru $\mathcal{D}$.*

Twierdzenie 5.3. *Jeśli $\mathbf{x}^{(1)}$ oraz $\mathbf{x}^{(2)}$ sa decyzjami optymalnymi zadania programowania liniowego, to decyzję optymalną reprezentuje każdy wektor $\mathbf{x}^{(w)} = (1-w)\mathbf{x}^{(1)} + w\mathbf{x}^{(2)}$ dla $0 \leqslant w \leqslant 1$.*

Twierdzenie 5.4. *Na wybór decyzji optymalnej nie wpływają przeskalowane funkcji celu (przez stałą dodatnią) oraz zastąpienie maksymalizacji (minimalizacji) funkcji f przez minimalizację (maksymalizację) funkcji $g = -f$.*

5.5 Przykładowe zadania

Ćwiczenie 5.1. Przedsiębiorstwo X produkuje wyroby W_1 oraz W_2 zużywając w tym celu środki A oraz B, które są limitowane: A - 960 jedn., B - 800 jedn. Nakłady limitowanych środków na jednostkę produktu przedstawia tabela

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady	
	wyrób W_1	wyrób W_2
A	16	24
B	16	10

Zdolności produkcyjne nie pozwalają na wyprodukowanie więcej niż 30 szt. wyrobu W_1 oraz 40 szt. wyrobu W_2. Ponadto analiza rynku wykazała, że optymalne proporcje produkcji kształtują się jak $3:2$. Ceny jednostkowe wyrobów kształtują się następująco: W_1 - 300 PLN, W_2 - 400 PLN. Ustalić rozmiary produkcji gwarantujące maksymalny zysk.

Ćwiczenie 5.2. Przedsiębiorstwo Y produkuje wyroby W_1 oraz W_2 zużywając w tym celu środki A oraz B, które są limitowane: A - $3\ 600$ jedn., B - $5\ 000$ jedn. Nakłady limitowanych środków na jednostkę produktu przedstawia tabela

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady	
	wyrób W_1	wyrób W_2
A	6	6
B	10	5

Zdolności produkcyjne nie pozwalają na wyprodukowanie więcej niż 400 szt. wyrobu W_2. Ustalić rozmiary produkcji gwarantujące maksymalny zysk przy założeniu, że zysk zrealizowany na obu wyrobach jest jednakowy.

Ćwiczenie 5.3. Przedsiębiorstwo Z produkuje wyroby W_1, W_2, W_3 oraz W_4 zużywając w tym celu środki A oraz B, które są limitowane: A - $9\ 000$ jedn., B - $12\ 000$ jedn. Nakłady limitowanych środków na jednostkę produktu przedstawia tabela

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady			
	wyrób W_1	wyrób W_2	wyrób W_3	wyrób W_4
A	1	2	$1,5$	6
B	2	2	$1,5$	4

Ustalić rozmiary produkcji gwarantujące maksymalny zysk przy założeniu, że zysk zrealizowany na wyrobach jest równy, odpowiednio 4, 6, 3 oraz 12 PLN.

Ćwiczenie 5.4. Przedsiębiorstwo U produkuje wyroby W_1, W_2, wykonywane na obrabiarkach O_1, O_2 i na frezarce F. Czas pracy tych maszyn jest ograniczony i wynosi O_1 - $33\ 000$, O_2 - $13\ 000$ oraz F - $80\ 000$. Nakłady pracy na jednostkę produktu przedstawia tabela

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady	
	wyrób W_1	wyrób W_2
O_1	3	1
O_2	1	1
F	5	8

Ustalić rozmiary produkcji gwarantujące maksymalny zysk przy założeniu, że zysk zrealizowany na wyrobach jest równy, odpowiednio, 1 oraz 3, przy czym wiadomo, że sprzedaż wyrobu W_2 nie przekracza $7\ 000$ szt.

Ćwiczenie 5.5. Przedsiębiorstwo V produkuje wyroby W_1, W_2, W_3 oraz W_4 na oddziałach A, B oraz C, których miesięczny czas pracy wynosi: A - 210 godz., B - co najmniej 100 godz. oraz C - co najwyżej 200 godz. Czas pracy oddziałów przypadający na obróbkę jednostek poszczególnych wyrobów wynosi

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady			
	wyrób W_1	wyrób W_2	wyrób W_3	wyrób W_4
A	1	0	$1,5$	2
B	0	0	3	1
C	$1,5$	2	0	$1,5$

Ustalić rozmiary produkcji gwarantujące maksymalny zysk przy założeniu, że zysk zrealizowany na wyrobach jest równy odpowiednio 3, 1.5, 4 oraz 3.5 PLN.